20/10/14.

Άσκηση 2.8. Έστω $x_0 \in [0,1]$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $(x_n)_{n\in \mathbb{N}_0}$ $\quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{x_n}{2}}$, $n=0,1,2,\dots$ συγκλίνει και το όριό της βρίσκεται στο $[0,1]$.

→ Αν συγκλίνει θα βρίσκει τη λύση της $f(x) = x - \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} = 0$.

$\varphi(x) = \frac{1}{2}\cdot e^{x/2}$

$\varphi'(x) = \frac{1}{4}e^{x/2} > 0$, $x\in[0,1] \Rightarrow$ η φ γνησίως αύξουσα.

$\varphi(0) \leq \varphi(x) \leq \varphi(1)$

$\varphi(0) = \frac{1}{2}$, $\varphi(1) = \frac{1}{2}e^{1/2} = \frac{\sqrt{e}}{2} < 1$

Αν $x_0 \in [0,1]$ τότε: $x_1 \in [\frac{1}{2},\frac{\sqrt{e}}{2}] \subset [0,1]$ $\quad \varphi: [0,1] \to [0,1]$

Καλώς ορισμένη.

$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq L|x-y|$ $\forall x,y \in [0,1]$, $L<1$.

$\varphi(x) - \varphi(y) = \varphi'(\xi)(x-y)$, ξ μεταξύ των x,y.

Αρκεί $\max\limits_{x\in[0,1]} |\varphi'(x)| = L < 1$.

$\max\limits_{x\in[0,1]} \frac{1}{4}e^{x/2} = \frac{1}{4}e^{1/2} = \frac{\sqrt{e}}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{e}}{2} < \frac{1}{2} < 1$, άρα η φ είναι συστολή.

⇒ Η ακολουθία συγκλίνει στη μοναδική ρίζα της f στο $[0,1]$.

Άσκηση (δική του)

Έστω $x_0 \in [0,1]$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $x_{n+1} = \frac{1}{4}|x_n^3 - \frac{1}{8}|$ $n=0,1,2\dots$ συγκλίνει στη ρίζα της εξίσωσης $f(x) = x - \frac{1}{4}|x^3-\frac{1}{8}| = 0$ που βρίσκεται στο $[0,1]$.

$$\varphi(x) = \frac{1}{4}\cdot|x^3-\frac{1}{8}|$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{8}-x^3\right), & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}\cdot\left(x^3-\frac{1}{8}\right), & \frac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases}$$

$$\min_{x\in[0,1]} \varphi(x) = \varphi\left(\tfrac{1}{2}\right) = 0.$$

$$\max_{x\in[0,1]} \varphi(x) = \max\{\varphi(0), \varphi(1)\} = \bigstar$$

$$\bigstar = \max\left\{\frac{1}{32}, \frac{7}{32}\right\} = \frac{7}{32} < 1$$

$\varphi: [0,1] \to [0, \frac{7}{32}] \subset [0,1]$ καλώς ορισμένη.

Έστω $x, y \in [0,1]$

$$|\varphi(x)-\varphi(y)| = \left|\frac{1}{4}\cdot|x^3-\frac{1}{8}| - \frac{1}{4}|y^3-\frac{1}{8}|\right| \le \left|\frac{1}{4}\cdot\left(x^3-\frac{1}{8}\right) - \frac{1}{4}\left(y^3-\frac{1}{8}\right)\right| =$$

σημείωση: $|\alpha+\beta| \le |\alpha|+|\beta|$, $||\alpha|-|\beta|| \le |\alpha-\beta|$

$$= \frac{1}{4}\cdot|x^3-y^3| = \frac{1}{4}|x^2+xy+y^2|\cdot|x-y| \le \frac{3}{4}|x-y|$$

$L = \frac{3}{4} < 1$ η φ είναι συστολή και άρα συγκλίνει στο σταθ. σημείο x^* στο $[0,1]$.

Ταχύτητα σύγκλισης Επαναληπτικών Μεθόδων.

Λέμε ότι μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ συγκλίνει στο x^* με (τουλάχιστον) γραμμική σύγκλιση ή με τάξη σύγκλισης τουλάχιστον 1, αν υπάρχει $0 \le c < 1$ και $N \in \mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε $|x_{n+1} - x^*| \le c\cdot|x_n - x^*|$ $\forall n \ge N$.

Η τάξη σύγκλισης θα είναι τουλάχιστον $p \ge 1$ αν υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε $|x_{n+1} - x^*| \le c\cdot|x_n - x^*|^p$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Η τάξη σύγκλισης είναι ακριβώς p αν $\lim \frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^p} = a \neq 0$

Για $p=1$ πρέπει και $|a|<1$.

Αν μια ακολουθία έχει τουλ. τάξη $p>1$ τότε έχει και τάξη τουλ. q με $1 \leq q \leq p$.

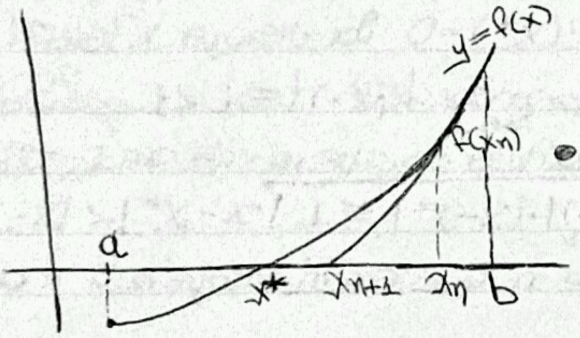
$$|x_{n+1}-x^*| \leq c\cdot|x_n-x^*|^p = c\cdot|x_n-x^*|^{p-q}\cdot|x_n-x^*|^q = \tilde{c}\,|x_n-x^*|^q.$$

Για $p=2$ η σύγκλιση λέγεται τετραγωνική

Για $p=3$ -||- -||- κυβική.

Η μέθοδος του Νεύτωνα. (Newton-Raphson).

Έστω $f(x)=0$.



$f \in C^2[a,b]$

• $y - f(x_n) = f'(x_n)\cdot(x-x_n) \Leftrightarrow y = f(x_n) + (x-x_n)f'(x_n) \Rightarrow 0 = f(x_n) + (x_{n+1}-x_n)\cdot f'(x_n) \Leftrightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Η ακολουθία ορίζεται αρκεί $f'(x_n) \neq 0$.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n=0,1,2\ldots$$

$0 = f(x^*) = f(x_n) + (x^*-x_n)\cdot f'(x_n) + \frac{(x^*-x_n)^2}{2}\cdot f''(\xi)$, ξ μεταξύ x^* και x_n.

Αν στους 2 πρώτους όρους θέσω x_{n+1} προσέγγιση του x^*. Έχω $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Η τάξη σύγκλισης της μεθόδου είναι μεγαλύτερη του 1.

Θεώρημα: (Τοπικής σύγκλισης της μεθόδου Νεύτωνα)

Έστω $f(x)=0$ και x^* μια ρίζα της εξίσωσης ($f(x^*)=0$) με $f'(x^*) \neq 0$ και η f είναι δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη σε μια περιοχή της ρίζας. Τότε υπάρχει κλειστό διάστημα I με μέσο του I τη ρίζα x^*, τέτοιο ώστε η ακολουθία που παράγει η μέθοδος Νεύτωνα είναι καλώς ορισμένη και συγκλίνει στη ρίζα x^*. Μάλιστα ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^2} = \frac{f''(x^*)}{2\cdot f'(x^*)}$, δηλ. η τάξη σύγκλισης είναι τουλ. 2 και αν $f''(x^*)\neq 0$ τότε είναι ακριβώς 2.

<u>Απόδειξη</u>

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)\cdot f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)\cdot f''(x)}{(f'(x))^2}.$$

$$\varphi'(x^*) = \frac{f(x^*)\cdot f''(x^*)}{(f'(x^*))^2} = 0.$$

Λόγω συνέχειας της φ' αφού $\varphi'(x^*)=0$ θα υπάρχει κλειστή περιοχή I με μέσο το x^* τω $\max_{x\in I}|\varphi'(x)| = L < 1$.

Τότε η <u>ακολουθία</u> είναι <u>καλώς ορισμένη</u> αν $x\in I$ τότε

$$|y-x^*| = |\varphi(x)-\varphi(x^*)| \leq |\varphi'(\xi)|\cdot|x-x^*| \leq L\,|x-x^*| < |x-x^*|$$

και είναι η φ <u>συστολή</u> επομένως η ακολουθία <u>συγκλίνει</u>.

$$x_{n+1}-x^* = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - x^*.$$

$$f(x_n) = \cancel{f(x^*)}^{\,0} + (x_n-x^*)f'(x^*) + \frac{(x_n-x^*)^2}{2}\cdot f''(\xi_{n1})$$

$$f'(x_n) = f'(x^*) + (x_n-x^*)\cdot f''(\xi_{n2})$$

<u>ξ_{n1}</u> και <u>ξ_{n2}</u> μεταξύ του <u>x_n</u> και <u>x^*</u>.

- $$x_{n+1}-x^* = x_n-x^* - \frac{(x_n-x^*)f'(x^*)+\frac{1}{2}(x_n-x^*)^2\cdot f''(\xi_{n1})}{f'(x^*)+(x_n-x^*)f''(\xi_{n1})} =$$

$$x_n-x^* - \frac{(x_n-x^*)f'(x^*)+(x_n-x^*)^2 f''(\xi_{n2})-(x_n-x^*)^2 f''(\xi_{n2})+\frac{1}{2}(x_n-x^*)^2 f''(\xi_{n1})}{f'(x^*)+(x_n-x^*)f''(\xi_{n1})} = (x_n-x^*)^2\,\frac{f''(\xi_{n2})-\frac{1}{2}f''(\xi_{n1})}{f'(x^*)+(x_n-x^*)f''(\xi_{n2})} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{f''(\xi_{n_1})-\frac{1}{2}f''(\xi_{n_1})}{f'(x^*)+(x_n-x^*)f''(\xi_{n_2})} = \frac{1}{2}\cdot\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}$$

<u>Η τάξη είναι ακριβώς 2 εάν $f''(x^*) \neq 0$.</u>

Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $f:[a,\infty) \to \mathbb{R}$ <u>τ.ώ.</u> $f(a)<0$, $f'(x)>0$, $f''(x)>0$ $\forall$ $x \geq a$ ($f \in C^2[a,\infty)$).

Τότε η ακολουθία που προκύπτει από τη μέθοδο του Νεύτωνα είναι καλώς ορισμένη στο $[a,\infty)$ και <u>συγκλίνει στη μοναδική απλή ρίζα</u> $p \in [a,\infty)$. Αν υπάρχει η p θα είναι μοναδική, επει δή f γν. αύξ. Αρκεί να βρούμε b <u>τ.ώ</u> $f(b)>0$.

$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}\cdot f''(\xi)$, ξ μεταξύ a και b.

Επιλέγω b <u>τ.ώ</u> $f(a)+(b-a)f'(a)>0 \Leftrightarrow b > a - \frac{f(a)}{f'(a)} > a$

τότε $f(b)>0$.